

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – 11 februarie 2023

Clasa a V-a

Barem de corectare și notare

Subiectul 1:

- a) Calculați numărul $A = 7 + 21 + 35 + \dots + 231$.
- b) Arătați că numărul $B = (7A)^{2023}$ este pătrat perfect.

Barem de corectare și notare

- a) $A = 7[1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 32 + 33 - (2 + 4 + 6 + \dots + 32)] \dots\dots\dots 1p$
- $A = 7[33 \cdot 34 : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 16)] \dots\dots\dots 1p$
- $A = 7(33 \cdot 17 - 16 \cdot 17) = 7 \cdot 17 \cdot (33 - 16) \dots\dots\dots 1p$
- $A = 7 \cdot 17^2 = 2023 \dots\dots\dots 1p$
- b) $B = (7A)^{2023} = (7 \cdot 7 \cdot 17^2)^{2023} \dots\dots\dots 1p$
- $B = ((7 \cdot 17)^2)^{2023} \dots\dots\dots 1p$
- $B = (119^{2023})^2$, pătrat perfect $\dots\dots\dots 1p$

Subiectul 2:

- a) Comparați numerele a și b , unde $a = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)^{2023}$ și $b = 9^{2023} \cdot 7^{4046}$.
- b) Scrieți numărul $m = (10^3 + 20^3 + 30^3 + 40^3 + 50^3 + 60^3)^n$ ca un produs între un pătrat perfect și un cub perfect, unde n este un număr natural nenul.

Barem de corectare și notare

- a) $a = (1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216)^{2023} = 441^{2023} \dots\dots\dots 1p$
- $b = (3^2)^{2023} \cdot 7^{4046} = 3^{4046} \cdot 7^{4046} = 21^{4046} \dots\dots\dots 1p$
- $b = (21^2)^{2023} = 441^{2023}$, $a = b \dots\dots\dots 1p$
- b) $m = [(10 \cdot 1)^3 + (10 \cdot 2)^3 + (10 \cdot 3)^3 + (10 \cdot 4)^3 + (10 \cdot 5)^3 + (10 \cdot 6)^3]^n \dots\dots\dots 1p$
- $m = [10^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)]^n \dots\dots\dots 1p$
- dar $(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3) = 21^2$, deci $m = (10^3 \cdot 21^2)^n \dots\dots\dots 1p$
- $m = (10^n)^3 \cdot (21^n)^2 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 3:

Aflați numărul natural $\overline{ab}$, cu cifre distincte, pentru care $(\overline{ab} - \overline{ba}) : (a - b) = \overline{bb} \cdot \overline{ba} - 2015$.

Barem de corectare și notare

$(10a + b - 10b - a) : (a - b) = (10b + b)(10b + a) - 2015$1p

$(9a - 9b) : (a - b) = 11b \cdot (10b + a) - 2015$1p

$9(a - b) : (a - b) = 11b \cdot \overline{ba} - 2015$1p

$9 = 11b \cdot \overline{ba} - 2015 \Leftrightarrow 11b \cdot \overline{ba} = 2024 \Leftrightarrow b \cdot \overline{ba} = 184$1p

Dacă $b \cdot \overline{ba} = 184$, atunci $b \leq 4$. Dacă $b = 5$, atunci $5 \cdot 51 = 225$, iar $225 > 184$0,5p

Dacă $b = 4 \Rightarrow 4 \cdot \overline{4a} = 184 \Rightarrow \overline{4a} = 46 \Rightarrow \overline{ab} = 64$1p

Dacă $b = 3 \Rightarrow 3 \cdot \overline{3a} = 184 \Rightarrow 184$ nu este divizibil cu 3.....0,5p

Dacă $b = 2 \Rightarrow 2 \cdot \overline{2a} = 184 \Rightarrow \overline{2a} = 92$, nu convine.....0,5p

Dacă $b = 1 \Rightarrow 1 \cdot \overline{1a} = 184$, nu convine.....0,5p

Deci $\overline{ab} = 64$

Subiectul 4:

Trei bicicliști au plecat împreună la ora 10 din localitatea A către localitatea B astfel: primul merge 20 minute și stă 5 minute; al doilea merge 30 de minute și stă 10 minute, iar al treilea merge 35 de minute și stă 15 minute. Când merg, bicicliștii au aceeași viteză. La ce oră se vor reîntâlni cei trei bicicliști după ce se despart prima oară?

Barem de corectare și notare

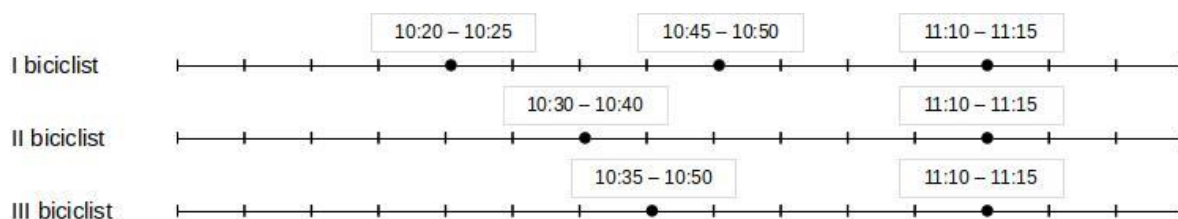
Cei trei bicicliști se despart prima oară la ora 10:20, când primul biciclist se oprește și stă 5 minute.0,5p

Al doilea și al treilea biciclist merg împreună până la ora 10:30, când al doilea biciclist se oprește și stă 10 minute.1p

Al treilea biciclist continuă să meargă până la 10:35, când se oprește și stă 15 minute. După fiecare oprire, bicicliștii continuă să se deplaseze, mergând cu aceeași viteză. Dacă sunt în mișcare, distanțele dintre ei se păstrează.1p

Ei se pot întâlni numai dacă 2 se găsesc în repaus în același loc și al treilea trece prin dreptul lor. De aceea trebuie studiată poziția celor trei bicicliști atunci când doi se găsesc în repaus în același loc1p

Reprezentăm printr-un segment distanța parcursă de un biciclist în 5 minute.



Se acordă câte 0,5 p pentru fiecare reprezentare corectă ce reprezintă cei trei bicicliști. În total1,5 p.

Prima dată se întâlnesc primii bicicliști la ora 11:10, când ei parcurg, fiecare, câte 12 segmente.0,5p

Ei rămân împreună până la ora 11:15, moment în care prin dreptul lor trece cel de-al treilea biciclist0,5p

Deci, la ora 11:15 cei trei bicicliști se vor întâlni prima oară, după ce s-au despărțit la ora 10:20.1p

Distanța față de localitatea A în momentul întâlnirii este de 12 segmente.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – 11 februarie 2023
Clasa a VI-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Fie a, b, c trei numere naturale. Dacă a reprezintă 40% din $(a + b)$, iar b reprezintă 30% din $(a + b + c)$, atunci:

- a) Determinați trei numere naturale prime cu care a, b, c sunt direct proporționale;
- b) Dacă $a^2 + b^2 + c^2 = 152$, determinați numerele a, b, c .

Barem de corectare și notare:

a) $a = \frac{40}{100}(a + b) \Leftrightarrow a = \frac{2}{5}(a + b) \Leftrightarrow 3a = 2b$ 1punct

$b = \frac{30}{100}(a + b + c) \Leftrightarrow b = \frac{3}{10}(a + b + c) \Leftrightarrow 5b = 3c$ 1punct

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3}; \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ 1punct

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \Leftrightarrow a, b, c$ direct proporționale cu 2, 3, 5 numere prime 1punct

b) $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \Rightarrow a = 2k, b = 3k, c = 5k$ 1punct

$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ 1punct

$a = 4, b = 6, c = 10$ 1punct

Problema 2

Determinați numerele naturale n pentru care $2n + 3$ divide $5n + 4$.

Barem de corectare și notare:

$$2n + 3 | 2n + 3, \text{ atunci } 2n + 3 | 5(2n + 3) \Leftrightarrow 2n + 3 | 10n + 15 \quad 2\text{puncte}$$

$$2n + 3 | 5n + 4, \text{ atunci } 2n + 3 | 2(5n + 4) \Leftrightarrow 2n + 3 | 10n + 8 \quad 2\text{puncte}$$

$$2n + 3 | ((10n + 15) - (10n + 8)) \quad 1\text{punct}$$

$$2n + 3 | 7 \quad 1\text{punct}$$

$$2n + 3 = 1, n \text{ nu este număr natural}$$

$$2n + 3 = 7 \Rightarrow n = 2 \in \mathbb{N} \quad 1\text{punct}$$

Problema 3

Se dau A, O, B trei puncte coliniare, iar C și D două puncte situate de aceeași parte a dreptei AB. Dacă $m(\sphericalangle COD) = 90^\circ$, iar $m(\sphericalangle AOC)$ este cu 12° mai mică decât $m(\sphericalangle BOD)$, calculați măsura unghiului format de bisectoarea $\sphericalangle AOD$ cu bisectoarea $\sphericalangle BOC$.

Barem de corectare și notare:

$$m(\sphericalangle AOC) = u \Rightarrow m(\sphericalangle BOD) = u + 12^\circ \quad 1\text{punct}$$

$$2u + 102^\circ = 180^\circ \Rightarrow u = 39^\circ \quad 1\text{punct}$$

$$m(\sphericalangle AOC) = 39^\circ, m(\sphericalangle BOD) = 51^\circ \quad 1\text{punct}$$

$$\text{Dacă } [OM \text{ bisectoarea } \sphericalangle AOD \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) = m(\sphericalangle MOD) = 64^\circ 30' \quad 1\text{punct}$$

$$\text{Dacă } [ON \text{ bisectoarea } \sphericalangle BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BON) = m(\sphericalangle NOC) = 70^\circ 30' \quad 1\text{punct}$$

$$m(\sphericalangle MON) = 180^\circ - (m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle BON)) = \quad 1\text{punct}$$

$$= 45^\circ \quad 1\text{punct}$$

Problema 4

Fie șapte unghiuri formate în jurul unui punct, având măsurile în grade exprimate prin numere naturale care dau același rest prin împărțire la 15. Demonstrați că printre acestea există două unghiuri egale.

Barem de corectare și notare:

$$u_1 = 15c_1 + r; \quad u_2 = 15c_2 + r; \quad u_3 = 15c_3 + r; \quad u_4 = 15c_4 + r; \quad u_5 = 15c_5 + r; \quad u_6 = 15c_6 + r; \\ u_7 = 15c_7 + r \quad 1\text{punct}$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 360^\circ \Rightarrow 15(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7) + 7r = 360 \quad 1\text{punct}$$

$$\Rightarrow 7r : 15, r < 15 \Rightarrow r = 0 \quad 1\text{punct}$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = 24 \quad 1\text{punct}$$

$$\text{Dar, } 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 > 24 \quad 1\text{punct}$$

$$\text{Deci, cel puțin două caturi trebuie să fie egale} \quad 1\text{punct}$$

$$\text{De exemplu, } 1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 24$$

$$\text{Deci, printre cele șapte unghiuri există cel puțin două unghiuri egale} \quad 1\text{punct}$$

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală – 11 februarie 2023

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

Problema 1

Se consideră numărul

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}(\sqrt{1} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}(\sqrt{2} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Arătați că, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

b) Pentru $n = 2022$ aflați valoarea lui A și rezolvați în $\mathbb{R}_+$ ecuația

$$\sqrt{x} \cdot A = \sqrt{x} - \frac{1}{17}$$

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Amplificând cu $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n \cdot (n+1)}(\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2)} =$	1p
$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$	2p
b) Aplicând egalitatea de la punctul a) avem: $A = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2022}} - \frac{1}{\sqrt{2023}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2023}}$	1p
$2023 = 7 \cdot 17^2 \text{ și avem } A = 1 - \frac{1}{17\sqrt{7}}$	1p
$\sqrt{x} \cdot A = \sqrt{x} - \frac{1}{17} \Leftrightarrow (A - 1)\sqrt{x} = -\frac{1}{17} \Leftrightarrow -\frac{1}{17\sqrt{7}}\sqrt{x} = -\frac{1}{17} \Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{17} \cdot \frac{17\sqrt{7}}{1} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = 7$	1p

Problema 2

Se consideră mulțimile:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{și} \quad B = \left\{ x \in \mathbb{Q} / \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Să se determine mulțimea $A - B$.

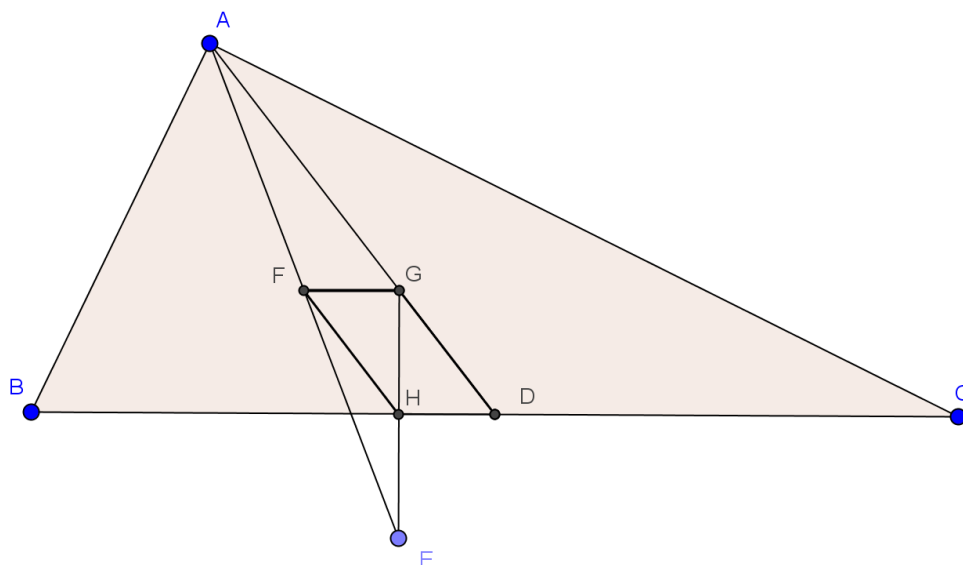
Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă n este par atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}$, $\frac{n+1}{2n+1} \in \mathbb{Z}$ rezultă $2n+1 \mid n+1$, iar din $2n+1 \mid 2(n+1)-(2n+1)$ rezultă $2n+1 \mid 1$, deci $n \in \{-1; 0\}$.	1p
Dar n este par, deci $n = 0$. Pentru $n = 0$ se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = \sqrt{1} = 1$ deci $0 \in A$	1p
Dacă n este impar atunci $\frac{n+(-1)^n}{2n+1} = \frac{n-1}{2n+1}$, $\frac{n-1}{2n+1} \in \mathbb{Z}$ rezultă $2n+1 \mid n-1$, iar din $2n+1 \mid 2(n-1)-(2n+1)$ rezultă $2n+1 \mid -3$, deci $n \in \{-2; -1; 0; 1\}$	1p
Dar n este impar, deci $n \in \{-1; 1\}$. Pentru $n = -1$ se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $n = 1$ se obține $\sqrt{\frac{n+(-1)^n}{2n+1}} = 0$, $0 \in \mathbb{Z}$ deci $1 \in A$ și $A = \{0; 1\}$	1p
Pentru $x = 0$ rezultă $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{0 + \sqrt{0 + 1}} = 1, 1 \in \mathbb{Q}$	1p
Pentru $x = 1$ rezultă $\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + 1}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$	1p
$0 \in B, 1 \notin B$, deci $A - B = \{1\}$	1p

Problema 3

Fie G centrul de greutate al triunghiului oarecare ABC , E simetricul lui G față de dreapta BC , F mijlocul segmentului AE , $\{H\} = GE \cap BC$ și D mijlocul laturii BC .

a) Arătați că punctele G, D, H, F sunt vârfurile unui paralelogram.

b) Calculați aria ΔFGE în funcție de s , unde s este aria paralelogramului de la punctul a).



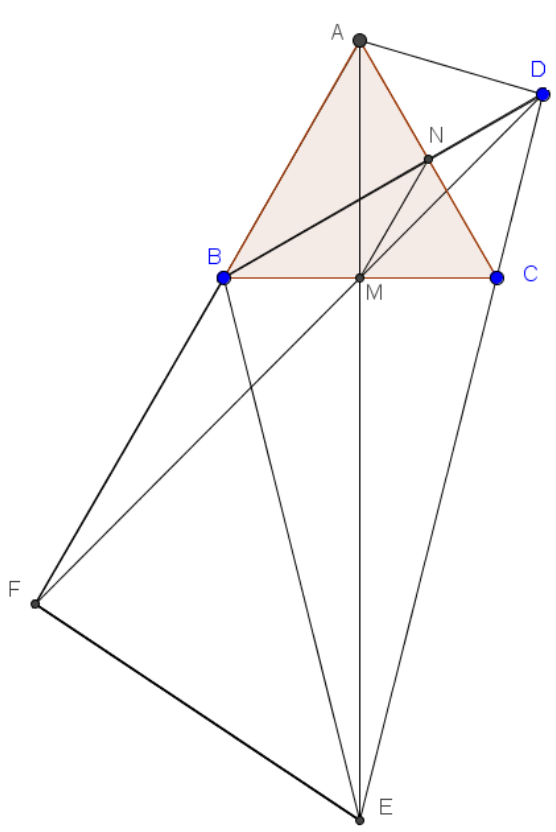
Detalii rezolvare	Barem asociat
a) E simetricul lui G față de dreapta BC , $\{H\} = GE \cap BC \Rightarrow H$ mijlocul lui GE , dar F mijlocul segmentului $AE \Rightarrow FH$ linie mijlocie în $\Delta EAG \Rightarrow FH \parallel AG$ și $FH = \frac{AG}{2}$	2p
G centrul de greutate în ΔABC și AD mediană $\Rightarrow GD = \frac{AG}{2} = FH$	1p
Cum $FH \parallel AG, G \in AD \Rightarrow FH \parallel GD$ și $FH = GD \Rightarrow DGFH$ paralelogram	1p
b) H mijlocul segmentului $GE \Rightarrow FH$ mediană în $\Delta EFG \Rightarrow A_{FGH} = \frac{A_{FGE}}{2}$	1p
$DGHF$ paralelogram $\Rightarrow A_{FGH} = \frac{A_{DGFH}}{2} = \frac{s}{2}$	1p
Deci $A_{FGE} = 2A_{FGH} = 2 \cdot \frac{s}{2} = s$.	1p

Problema 4

Fie triunghiul echilateral ABC , punctul M mijlocul laturii BC și punctul D aflat pe bisectoarea unghiului $\angle ABC$ astfel încât $\angle BDM = 15^\circ$.

a) Aflați $\angle ADC$.

b) Dacă E este punctul de intersecție al dreptelor DC și AM , iar F punctul de intersecție al dreptelor AB și MD , demonstrați că $BD = EF$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
	1p
a) Fie N mijlocul laturii AC . Atunci $BN \perp AC$ și $MN \parallel AB$, deci $\angle DNM = \angle DNC + \angle CNM = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.	1p
Rezultă $\angle DMN = 180^\circ - \angle DNM - \angle NDM = 180^\circ - 150^\circ - 15^\circ = 15^\circ$, de unde $ND = MN$	1p
Reiese $ND = NA = NC$, deci $\triangle ADC$ este dreptunghic, iar $\angle ADC = 90^\circ$.	1p
b) Din $\angle DBF = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ$ reiese $\angle DFB = 15^\circ$, deci $DB = BF$.	1p
Mediatoarea segmentului BC este AM , $\angle EBC = \angle ECB = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$, de unde $\angle EBF = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$. (1)	1p
Patrulaterul $ADEF$ este inscriptibil, deoarece $\angle EAF = \angle EDF = 30^\circ$ și este convex. Rezultă $\angle EFA = 180^\circ - \angle EDA = 90^\circ$ de unde, folosind (1), $\angle EBF = \angle BEF$, deci $EF = FB = BD$.	1p

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală – 11 februarie 2023**Barem de corectare și notare - clasa a VIII-a****Problema 1.**

- a) Să se determine $[x]$ dacă $x = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- b) Determinați valoarea expresiei $E(x) = 2 \cdot \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2x - \sqrt{3})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$, știind că $1 < x < \sqrt{2}$

Soluție cu barem.

- a) $x = \left(\frac{9}{2\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{-3} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) \cdot (6\sqrt{6}) = \frac{9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{6} \cdot 6\sqrt{6} = 27\sqrt{2} - 16\sqrt{3} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $27\sqrt{2} = \sqrt{1458}$ și $38 = \sqrt{1444} < \sqrt{1458} < \sqrt{1521} = 39$
 $16\sqrt{3} = \sqrt{768}$ și $27 = \sqrt{729} < \sqrt{768} < \sqrt{784} = 28 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
Se obține $10 < 27\sqrt{2} - 16\sqrt{3} < 11$ pentru că $\{27\sqrt{2}\} < \{16\sqrt{3}\}$, deci $[x] = 10 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
- b) Dacă $1 < x < \sqrt{2}$ avem că $2 < 2x < 2\sqrt{2}$ după care: $x - \sqrt{2} < 0$ și $2x - \sqrt{3} > 0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $E(x) = 2 \cdot \sqrt{(x - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2x - \sqrt{3})^2} + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| = 2 \cdot |x - \sqrt{2}| + |2x - \sqrt{3}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| \dots\dots\dots 2 \text{ p}$
 $E(x) = 2\sqrt{2} - 2x + 2x - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$xyz - 6x + 3y - 2z = 3xy - 2xz + yz + 2023$$

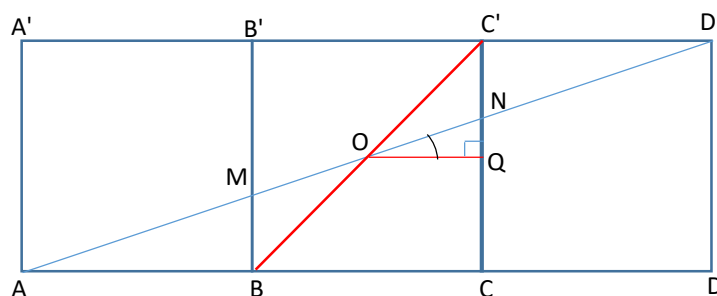
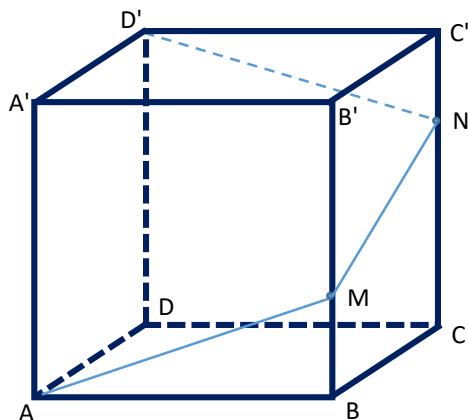
Soluție cu barem.

- $xyz + 2xz - 6x - 3xy + 3y - yz - 2z + 6 = 2023 + 6 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $xz(y + 2) - 3x(y + 2) - y(z - 3) - 2(z - 3) = 2029 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $x(y + 2)(z - 3) - (z - 3)(y + 2) = 2029 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 2)(z - 3) = 2029 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
iar $\mathcal{D}_{2029} = \{1, 2029\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
Cum x, y, z sunt numere naturale avem că $x - 1 \geq -1$, $y + 2 \geq 2$ și $z - 3 \geq -3$
Astfel avem $2029 = 1 \cdot 1 \cdot 2029 = (-1) \cdot (-1) \cdot 2029 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
 $y + 2 = 2029 \Rightarrow y = 2027$
 $x - 1 = 1$ și $z - 3 = 1$ de unde $x = 2$ și $z = 4$
 $x - 1 = -1$ și $z - 3 = -1$ de unde $x = 0$ și $z = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$
Obținem soluțiile: $(x, y, z) \in \{(2, 2027, 4), (0, 2027, 2)\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Problema 3.

Fie cubul $ABCD A'B'C'D'$. Pe muchiile $[BB']$ și $[CC']$ considerăm punctele M și N astfel încât suma $AM + MN + ND'$ să fie minimă. Dacă $MN = 2\sqrt{10}$ cm, calculați sinusul unghiului determinat de dreptele MN și AD .

Soluție cu barem.



Dreptele AD și MN sunt necoplanare. 1 p

Cum $AD \parallel BC \Rightarrow (\widehat{AD;MN}) = (\widehat{BC;MN}) = (\widehat{OQ;MN}) = \widehat{NOQ}$,

unde $\{O\} = MN \cap BC'$ și $OQ \perp CC'$.

Suma $AM + MN + ND'$ minimă, utilizată pe desfășurarea laterală conduce la

coliniaritatea punctelor A, M, N și D' 1 p

AA', BB', CC' și DD' sunt paralele echidistante, astfel că $AM = MN = ND' = 2\sqrt{10}$ cm 1 p

Avem și: $MB = \frac{1}{3}BB'$ și $NC = \frac{2}{3}CC'$ 1 p

Se determină lungimea muchiei cubului din $\triangle NC'D'$:

dacă $C'D' = 3x$, atunci $C'N = x$ și avem că $9x^2 + x^2 = (2\sqrt{10})^2$ de unde $x = 2$

iar muchia cubului are lungimea de 6 cm. 1 p

Se calculează pe rând: $ON = \sqrt{10}$ cm, $NQ = 1$ cm, 1 p

Avem din $\triangle OQN$: $\sin \widehat{NOQ} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 1 p

Problema 4.

a) În spațiu avem 9 puncte astfel încât ele sunt situate pe patru drepte paralele cu dreapta a și de asemenea pe trei drepte paralele cu dreapta b , dreptele a și b nefiind paralele. Să se demonstreze că punctele sunt coplanare.

b) Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara SA . Fie E mijlocul segmentului $[SC]$.

i) Demonstrează că $\triangle DEB$ este isoscel.

ii) Dacă M este mijlocul segmentului $[BE]$, $SM \cap BC = \{N\}$, iar $BD \cap AN = \{P\}$, arată că $MP \parallel (SAD)$.

Soluție cu barem.

a) Fie dreptele b_1, b_2 și b_3 cele trei drepte paralele cu dreapta b

iar a_1, a_2, a_3 și a_4 cele patru drepte paralele cu dreapta a

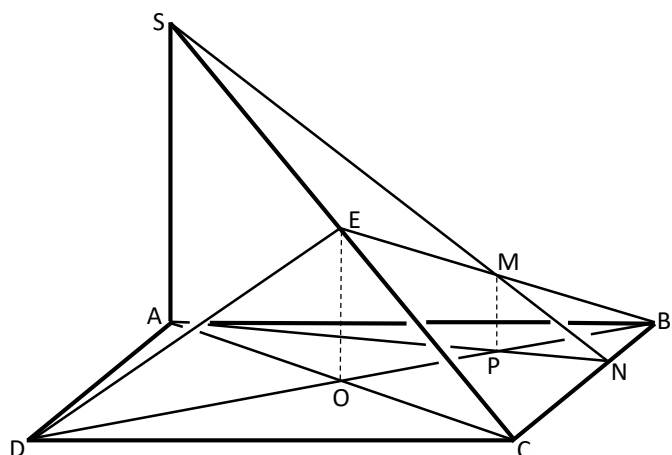
Pe una dintre dreptele a_i (fie aceasta a_1) sunt cel puțin 3 puncte 1 p

Aceste 3 puncte (împreună cu celelalte 6 puncte) trebuie să se găsească

și pe 3 drepte paralele cu b 1 p

Cum oricare dintre ele nu se pot găsi pe o dreaptă b_k dacă a_1 și b_k sunt necoplanare (deoarece $a_1 \nparallel b$), atunci obținem că cele 3 drepte b_1, b_2 și b_3 paralele cu b se intersectează cu a_1 în cele trei puncte. Ceea ce înseamnă că toate punctele sunt coplanare. 1 p

b)



a) Fie $\{O\} = AC \cap BD$
 cum E este mijlocul segmentului $[SC]$ avem că
 $[EO]$ este linie mijlocie în $\triangle SAC$
 Deci $EO \parallel SA$ iar $SA \perp (ABC)$
 Prin urmare $EO \perp (ABC)$, adică $EO \perp BD$. . 1 p
 Astfel: $[EO]$ este mediană și înălțime în $\triangle DEB$,
 prin urmare $\triangle DEB$ este triunghi isoscel
 cu $[ED] \equiv [EB]$ 1 p

b)
 $SA \perp (ABC), SA \subset (SAN) \Rightarrow (SAN) \perp (ABC)$
 $EO \perp (ABC), EO \subset (EBD) \Rightarrow (EBD) \perp (ABC)$ 1 p
 $(EBD) \cap (SAN) = MP$
 $\Rightarrow MP \perp (ABC) \Rightarrow MP \parallel SA \quad MP \parallel (SAD)$ 1 p